Çok Kriterli Karar Verme için Alfa İndirgeme Yöntemi (α-İ ÇKKV)

Florentin Smarandache
University of New Mexico
200 College Road, Gallup
NM 87301, USA
E-posta: smarand@unm.edu

ÖZET

Bu makalede, Saaty'nin Analitik Hiyerarşi Sürecine (AHP) alternatif olan ve onu genişleten Çok Kriterli Karar Verme için Alfa İndirgeme Yöntemi (α-İ ÇKKV) olarak adlandırdığımız yeni bir yaklaşımı sunmaktayız. Yöntem, homojen lineer eşitlikler sistemine dönüştürülebilen herhangi bir tercihler kümesi için işe yarar. Karar verme probleminin tutarlılık derecesi (ve dolaylı olarak da tutarsızlık derecesi) tanımlanmaktadır. α-İ ÇKKV, lineer ve/veya lineer olmayan homojen ve/veya homojen olmayan eşitlikler ve/veya eşitsizlikler sistemine dönüştürülebilen bir tercihler kümesine genelleştirilmiştir. Makalede birçok tutarlı, zayıf tutarsız ve güçlü tutarsız örnekler verilmektedir.

Anahtar Sözcükler: Çok Kriterli Karar Verme (ÇKKV), Analitik Hiyerarşi Süreci (AHP), α İndirgeme Yöntemi, Adillik İlkesi, Parametreleştirme, İkili Karşılaştırma, n-li Karşılaştırma, Tutarlı ÇKKV Problemi, Zayıf veya Güçlü Tutarsız ÇKKV Problemi.

1 GİRİŞ

Çok Kriterli Karar Verme için Alfa İndirgeme Yöntemi (α-İ ÇKKV), Saaty'nin Analitik Hiyerarşi Sürecine (AHP) alternatif ve onun bir genişletmesidir (Daha fazla bilgi için [1 – 11] arasındaki makalelere bakınız). Yöntem, sadece AHP'nin yaptığı gibi ikili karşılaştırmalar tarzındaki tercihler için işe yaramakta kalmayıp aynı zamanda lineer homojen eşitlikler olarak ifade edilebilen kriterlerin herhangi n-li ($n \geq 2$ için) karşılaştırmaları tarzındaki tercihler için de işe yaramaktadır.

α-İ ÇKKV'deki genel fikir; sadece sıfır çözümü olan üst taraftaki eşitliklerin lineer homojen sistemini belli bir sıfırdan farklı çözümü olan bir sisteme dönüştürmek amacıyla katsayıları azaltan veya arttıran $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ gibi sıfırdan farklı pozitif parametreleri her bir tercihin sağ taraf katsayılarına atamaktır.

Bu sistemin genel çözümünü bulduktan sonra tüm α değerlerini belli değerler atamak için kullanılan ilkeler yöntemin ikinci önemli kısmıdır; ancak bu kısım gelecekte daha derin incelenecektir. Mevcut makalede Adillik İlkesini önermekteyiz; diğer bir deyişle, her bir katsayı ayrı yüzdeyle indirgenmelidir (Bunun adil olduğunu düşünüyoruz: Herhangi bir katsayıya adaletsizlik ya da kayırmacılık yapmama); fakat okuyucu başka ilkeler önerebilir.

İkili karşılaştırmalı tutarlı karar verme problemleri için Adillik İlkesiyle beraber kullanılan α-İ ÇKKV, AHP ile aynı sonucu vermektedir. Ancak zayıf tutarsız karar verme problemlerinde Adillik İlkesiyle beraber kullanılan α-İ ÇKKV, AHP'den farklı bir sonuç vermektedir.

α-İ/Adillik İlkesi beraber iki tercihli ve iki kriterli güçlü tutarsız karar verme problemleri için doğruluğu ispat edilebilir bir sonuç vermektedir; ancak tercih ve kriter sayısı ikiden fazla olan ÇKKV problemleri için Adillik İlkesinin yerini tüm α parametrelerine sayısal değerler atayan başka bir ilke almalıdır.

Bu makalenin konusu Saaty'nin AHP'si olmadığından sadece bu yöntemin uygulanmasındaki ana adımları hatırlatacağız, böylece α-İ ÇKKV ile AHP'nin sonuçları kıyaslanabilsin.

AHP kriterlerin sadece ikili karşılaştırmaları için işe yarayan bir yöntemdir. Bu karşılaştırmalardan n x n boyutunda bir kare Tercih Matrisi, A, oluşturulur. Bu matrise dayalı olarak A'nın maksimum öz değerini, λmax, ve ilgili öz vektörü hesaplanır.

Eğer λ_{max} kare matrisin boyutuna eşitse bu durumda karar verme problemi tutarlıdır ve ilgili normalleştirilmiş öz vektörü (Perron-Frobenius Vektörü) öncelik vektörüdür.

Eğer λ_{max} kare matrisin boyutundan kesin surette daha büyükse bu durumda karar verme problemi tutarlı değildir. Bu durumda A matrisi ikinci üssüne yükseltilir ve elde edilen matris tekrar kendi ikinci üssüne yükseltilir, vb. ki böylelikle A^2, A^4, A^8, … vb matris dizisi elde edilir. Her bir durumda, iki ardıl normalleştirilmiş öz vektörler arasındaki fark belirlenmiş eşik noktasından daha küçük oluncaya kadar maksimum öz değeri ve ilgili normalleştirilmiş öz vektörü hesaplanmaya devam eder. Belirlenmiş eşik noktasından küçük olan son öz vektör öncelik vektörü olacaktır.

Saaty, Tutarlılık Endeksini şöyle tanımlamıştır: $CI(A) = \frac{\lambda_{max}(A) - n}{n - 1}$, n=Kare matris A'nın boyutu.

2 Çok Kriterli Karar Verme için α-İndirgeme Yöntemi (α-İ ÇKKV)

2.1 α-İ ÇKKV Tanımı

Bu makalenin genel fikri tutarsız bir (karar verme) problemin(in) katsayılarını belli yüzdelere indirgeyerek tutarlı bir (karar verme) problem(in)e dönüştürmektir.

Kriterler kümesi, C={C1, C2, …, Cn}, n ≥ 2, ve

Tercihler kümesi, P={P1, P2, …, Pn}, m ≥ 1 olsun.

Her bir P_i tercihi yukarıda verilen C_1, C_2, …, C_n kriterlerinin bir lineer homojen eşitliğidir:

$$P_i = f(C_1, C_2, \dots, C_n)$$

Aşağıdaki gibi bir temel kanı ataması (bba) oluşturmamız gerekir:

$$m: C \rightarrow [0, 1]$$

öyle ki $m(C_i) = x_i$, $0 < x_i < 1$ ve $\sum_{i=1}^{n} m(C_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$.

P tercihler kümesiyle uyumlu tüm x_i değişkenlerini bulmamız gerekir. Bu suretle, eşlenik matrisi

$$A = (a_{ij}),\ 1 \le i \le m \text{ ve } 1 \le j \le n$$

olan m x n boyutunda eşitliklerin lineer homojen sistemini elde ederiz.

Bu sistemin sıfırdan farklı çözümlere sahip olması için A matrisinin mertebesi kesinlikle n'den küçük olmalıdır.

2.2 Lineer Karar Verme Problemlerinin Sınıflandırılması

a) Bir x_i değişkeninin bir eşitlikten diğer bir eşitliğe herhangi bir ikamesiyle tüm eşitliklerle uyumlu bir sonuç alıyorsak bu **lineer karar verme problemi tutarlıdır** deriz.

b) Bir eşitlikten diğer bir eşitliğe bir x_i değişkeninin en az bir tane ikamesiyle aşağıdaki şekillerde gösterildiği gibi en az bir eşitlikle uyumsuz bir sonuç alıyorsak bu **lineer karar verme problemi zayıf tutarsızdır** deriz:

$$WD(1)\left\{\begin{matrix} x_i = k_1 \cdot x_j, k > 1; \\ x_i = k_2 \cdot x_j, k_2 > 1, k_2 \neq k_1 \end{matrix}\right\}$$

veya

$$WD(2)\left\{\begin{matrix} x_i = k_1 \cdot x_j, 0 < k < 1; \\ x_i = k_2 \cdot x_j, 0 < k_2 < 1, k_2 \neq k_1 \end{matrix}\right\}$$

veya

$$WD(3)\{x_i = k \cdot x_i, k \neq 1\}$$

Örneğin bir x değişkeni y'den büyük olma (x > y) koşulunu farklı oranlarla sağlıyor olsun (mesela, x = 3y ve x = 5y). Bu sebepten, (WD1)-(WD3) zayıf uyuşmazlıklardır. Bu durumda, tüm uyuşmazlıklar (WD1)-(WD3) gibi olmalıdır.

c) Eğer bir x_i değişkeninin bir eşitlikten diğer bir eşitliğe en az bir tane ikamesiyle aşağıda gösterildiği gibi en az bir eşitlikle uyumsuz bir sonuç alıyorsak bu **lineer karar verme problemi güçlü tutarsızdır** deriz:

$SD(4)\left\{\begin{matrix} x_i = k_1 \cdot x_j; \\ x_i = k_2 \cdot x_j, \end{matrix}\right\}$, $0 < k_1 < 1 < k_2$ veya $0 < k_2 < 1 < k_1$ iken (diğer bir deyişle bir eşitlikten $x_i < x_j$ elde edilirken diğer bir eşitlikten tam tersi bir eşitsizlik olan $x_j < x_i$ elde edilir.)

Güçlü tutarsızlık için (SD4) gibi en az bir tutarsızlığın var olması gerekir; bu durum için (WD1)-(WD3) gibi tutarsızlıkların olup olmaması önem taşımaz.

A matrisinin determinantını hesapla.

a) Eğer det(A) = 0 ise karar problemi tutarlıdır zira eşitlikler sistemi bağımlıdır. Sistemi parametreleştirmek şart değildir. {Parametreleştirdiğimiz durumda Adillik İlkesini kullanabiliriz; diğer bir deyişle, tüm parametreleri birbirine eşitleriz $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_p > 0$}

Bu sistemi çözelim ve genel çözümünü bulalım. Parametreleri ve ikincil değişkenleri yerine koyalım, böylelikle belli bir çözüm elde edebiliriz. Bu belli çözümü (her bir bileşeni tüm bileşenlerin toplamına bölerek) normalleştirelim. Bunun sonucunda (bileşenlerinin toplamı 1 etmesi gereken) öncelik vektörünü elde ederiz.

b) Eğer det(A) ≠ 0 ise karar problemi tutarsızdır zira homojen lineer sistemin sadece sıfır çözümü vardır.

i. Eğer tutarsızlık zayıf düzeydeyse sağ taraf katsayılarını parametreleştirip sistem matrisini A(α) olarak belirt.

Parametrik eşitliği elde edebilmek için det(A(α)) = 0'ı hesapla.

Eğer Adillik İlkesi kullanılıyorsa tüm parametreleri birbirine eşitle ve α > 0 için çöz.

A(α)'daki α'yı değiştir ve elde edilen bağımlı homojen lineer sistemi çöz.

“a)”’dakine benzer şekilde her bir ikincil değişkeni 1 ile değiştir ve öncelik vektörünü elde edebilmek için ulaşılan çözümü normalleştir.

ii. Eğer tutarsızlık güçlüyse Adillik İlkesi istenildiği gibi işe yaramayabilir. Başka bir yaklaşımlı ilke tasarlanabilir veya daha fazla bilgi edilerek karar verme probleminin güçlü düzeydeki tutarsızlıkları tekrar gözden geçirilebilir.

2.3 AHP ile α-İ ÇKKV’nin Karşılaştırması

a) α-İ ÇKKV’nin genel çözümü AHP’ninki de dâhil olmak üzere tüm belirli çözümleri içerir.

b) α-İ ÇKKV sadece ikili karşılaştırmalarla sınırlı kalmayıp kriterler arasında tüm karşılaştırma türlerini kullanır.

c) Tutarlı problemler için AHP ve α-İ ÇKKV/Adillik İlkesi aynı sonucu verir.

d) Büyük girdiler için α-İ ÇKKV eşitlikleri (bazı α parametrelerine bağlı olarak) bir matris formun altına koyabiliriz ve sonra 0 olacak şekilde matrisin determinantını hesaplayabiliriz. Bundan sonra sistemi çözeriz (tüm bunlar matematik yazılımları kullanılarak bilgisayarda yapılabilir): MATHEMATICA ve MAPLE gibi yazılımlar örneğin determinant hesaplamalarını yapabilir ve bu lineer sistemin çözümlerini hesaplayabilir).

e) α-İ ÇKKV daha büyük tercihler sınıfı için işe yarayabilir; diğer bir deyişle, homojen lineer eşitliklere veya lineer olmayan eşitliklere ve/veya eşitsizliklere dönüştürülebilen türde tercihler için. Daha fazla ayrıntı için aşağıya bakın.

2.4 α-İ ÇKKV’nin Genelleştirmesi

Her bir tercih, lineer ya da lineer olmayan eşitlik veya eşitsizlik olarak ifade edilebiliyor olsun. Tüm tercihler beraber lineer/lineer olmayan eşitlikler/eşitsizlikler sistemini veya eşitlikler ve eşitsizliklerin karma bir sistemini oluştururlar.

Kesinlikle pozitif bir çözümü (yani tüm bilinmeyen $x_i > 0$) arayarak bu sistemi çözelim. Sonra çözüm vektörünü normalleştirelim. Eğer böyle birden fazla sayısal çözüm varsa bir değerlendirme yapın: Her bir durumdaki normalleştirilmiş çözüm vektörünü analiz edin. Eğer genel bir çözüm varsa en iyi belirli çözümü seçerek alın. Eğer kesinlikle pozitif çözüm yoksa sistemin katsayılarını parametreleştirin, parametrik eşitliği bulun ve α parametrelerinin sayısal değerlerini bulabilmek için uygulanacak bazı ilkeleri arayın. Bir tartışma/değerlendirme dâhil edilebilir. Belirlenemeyen sonuçlar elde edebiliriz.

3 α-İ ÇKKV/Adillik İlkesinde Tutarlılık ve Tutarsızlık Dereceleri

Tutarlı ve zayıf tutarlı karar verme problemlerindeki α-İ ÇKKV/Adillik İlkesi için aşağıdaki durumlar söz konusudur:

a) Eğer $0 < \alpha < 1$ ise o zaman α karar verme probleminin **tutarlılık derecesi**dir ve $\beta = 1 - \alpha$ da karar verme probleminin **tutarsızlık derecesi**ni belirtir.

b) Eğer $\alpha > 1$ ise o zaman $1/\alpha$ karar verme probleminin **tutarlılık derecesi**dir ve $\beta = 1 - 1/\alpha$ da karar verme probleminin **tutarsızlık derecesi**ni belirtir.

4 α-İ ÇKKV’nin İlkeleri (İkinci Kısım)

1. α-İ Yönteminin ikinci kısmında uygulamalarda diğer ilkeler Adillik İlkesi’nin yerini alabilir.

   Uzman Görüşü: Örneğin, bir tercihin katsayısının uzman görüşüne dayanarak diğer bir katsayıdan iki kat daha fazla ve başka bir tercihin katsayısının da üçte biri kadar indirgeneceğine dair bir

bilgimiz varsa o zaman uygun bir şekilde parametrik eşitliğimizde bu durumu belirtiriz. Örneğin; $\alpha_1 = 2\alpha_2$ ve anılan sıraya göre $\alpha_3 = (1/3)\alpha_4$.

2. α-İ/Adillik İlkesi veya Uzman Görüşü

   Buradaki başka bir görüş de bir **tutarlılık eşiği** t_c (veya dolaylı olarak bir **tutarsızlık eşiği** t_i) belirlemek olabilir. Bu durumda, tutarlılık derecesi istenen t_c değerinden azsa Adillik İlkesi veya Uzman Görüşü (hangisi kullanıldıysa) bırakılmalı ve tüm α değerlerini bulan başka bir ilke tasarlanmalıdır. Benzeri şekilde aynı durum tutarsızlık t_i değerinden çok olması durumunda da geçerlidir.

3. Tüm m tercihlerinin eşitliklere dönüştürülebildiği durum için sistemin hatasızlığı (veya hatası) ölçülebilir. Örneğin; P_i tercihi $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ eşitliğine dönüştürülsün. O halde, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bilinmeyenlerini bulmamız gerekir, öyle ki:

   $$\text{(e: hata)},\ e(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{m} \left| f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \right| \text{ minimum olsun.}$$

   Eğer minimum değer mevcutsa Analiz (Calculus) Teorisi (kısmi türevler) kullanılarak $e : R_+^n \to R_+$ iken $e(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ gibi n değişkenli bir fonksiyonun minimum değeri bulunabilir. Tutarlı karar verme problemleri için sistemin hatasızlığı/hatası sıfırdır; böylelikle kesin sonucu elde ederiz.

   Bunu şu gerçek yoluyla kanıtlayabiliriz: Tüm i'ler için $x_i = a_i > 0$ olduğu normalleştirilmiş öncelik vektörü $[a_1\ a_2\ \ldots\ a_n]$, $i = 1, 2, \ldots, m$ için $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ sisteminin belirli bir çözümüdür. Dolayısıyla,

   $$\sum_{i=1}^{m} \left| f_i(a_1, a_2, \ldots, a_n) \right| = \sum_{i=1}^{m} |0| = 0$$

   Ancak tutarsız karar verme problemleri için değişkenler için yaklaşık değerler buluruz.

5 α-İ ÇKKV için Genişletme (Lineer Olmayan α-İ ÇKKV)

Tercihlerin lineer olmayan homojen (veya hatta homojen olmayan) eşitlikler olduğu durum için α-İ ÇKKV'yi genelleştirmek zor değildir. Tercihlerin bu lineer olmayan sistemi bağımlı olmak zorundadır (bu, gene çözümün – ana değişkenlerin – en az bir tane ikincil değişkene bağlı olması anlamına gelir). Eğer sistem bağımlı değilse sistemi aynı yolla parametreleştirebiliriz. Üstelik bu lineer olmayan α-İ ÇKKV'nin ikinci kısmında (alabileceğimiz ek bilgiye bağlı olarak) ikincil değerlerin her birine bazı değerler atarız ve tüm parametreler için sayısal değerleri bulabilmemize yardım edecek bir ilkeyi tasarlamaya da ihtiyacımız vardır. (Genel çözümden böylelikle türettiğimiz) belirli bir sonuç elde ederiz. Buradan normalleştirdiğimiz sonuç bize öncelik vektörümüzü verecektir. Ancak, Lineer Olmayan α-İ ÇKKV daha karmaşıktır ve her bir lineer olmayan karar verme problemine bağlıdır.

Şimdi bazı örnekler görelim.

6 Tutarlı Örnek 1

6.1 α-İ ÇKKV ile Çözüm

α-İ ÇKKV'yi kullanarak örneğimizi çözelim. Tercihler Kümesi {C1, C2, C3} olsun ve Kriterler Kümesi ise

1. C1, C2'ye göre 4 kat önemlidir.

2. C2, C3'e göre 3 kat önemlidir.

3. C3, C1'e göre 1/12 kat önemlidir.

şeklinde belirtilmiştir. m(C1) = x, m(C2) = y, m(C3) = z olsun.

Bu karar verme problemine eşlenmiş lineer homojen sistem şöyledir:

$$\begin{cases} x = 4y \\ y = 3z \\ z = \dfrac{x}{12} \end{cases}$$

Bu sistemin eşlenik A_1 matrisi ise şöyledir:

$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1/12 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, buradan $\det(A_1) = 0$, bundan dolayı karar verme problemi tutarlıdır.

Bu homojen lineer sistemi çözerek [12z 3z z] vektörü olarak belirlediğimiz genel çözüme ulaşırız. z herhangi bir reel sayı olabilir (x = 12z ile y = 3x ana değişkenlerken z, ikincil bir değişken olarak addedilebilir).

z = 1 yaparak vektör değerleri olarak [12 3 1]'e ulaşırız ve akabinde normalleştirerek (her bir vektör bileşenini 12 + 3 + 1 = 16'ya bölerek) öncelik vektörünü elde ederiz: [12/16 3/16 1/16], böylelikle tercihimiz C1 olacaktır.

6.2 AHP ile Çözüm

Örneği AHP ile çözersek aynı sonucu elde ederiz. Tercih matrisimiz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 12 \\ 1/4 & 1 & 3 \\ 1/12 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrisin maksimum öz değeri λ_{max} = 3'tür ve karşılık gelen normalleştirilmiş öz vektörü (Perron-Frebenius vektörü) ise [12/16 3/16 1/16]'dır.

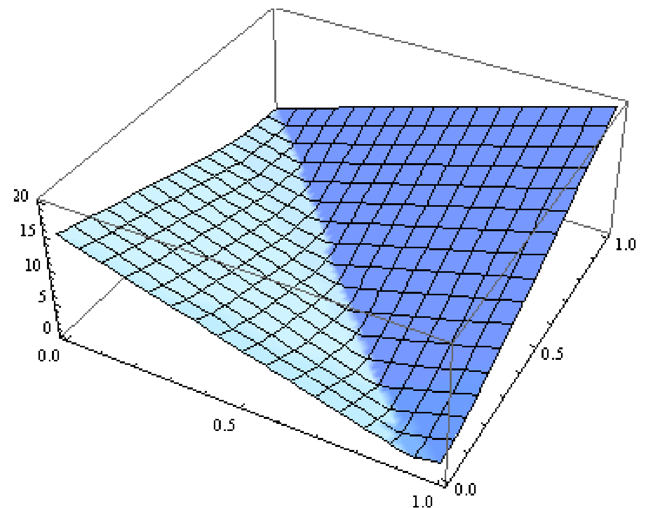
6.3 Mathematica 7.0 Yazılımıyla Çözüm

Mathematica 7.0'ı kullanarak h(x,y) = |x - 4y| + |3x + 4y - 3| + |13x + 12y - 12|; x, y ∈ [0, 1] şeklindeki fonksiyonun grafiğini çizeriz. Bu fonksiyon, tutarlı karar verme probleminin eşlenik sistemini temsil eder:

x/y = 4, y/z = 3, x/z = 12, ve x + y + z = 1, x > 0, y > 0, z > 0.

In[1]:=

```
Plot3D[Abs[x-4y]+Abs[3x+4y-3]+Abs[13x+12y-12],{x,0,1},{y,0,1}]
```



Bu fonksiyonun minimum değeri 0 ve x = 12/16, y = 3/16'dır.

Eğer h(x, y) ile eşleştirilmiş üç değişkenin orijinal fonksiyonunu ele alacak olursak o zaman

$$H(x, y, z) = |x - 4y| + |y - 3z| + |x - 12z|,\ x + y + z=1,\ \text{ve } x, y, z \in [0,1].$$

Aynı şekilde H(x, y, z)'nin minimum değerini 0 olarak buluruz ve x = 12/16, y = 3/16, z = 1/16'dır.

7 AHP'nin İşe Yaramadığı Zayıf Tutarsız Örnekler

Tercihler Kümesi {C1, C2, C3} olsun.

7.1 Zayıf Tutarsız Örnek 2

7.1.1 α-İ ÇKKV Yöntemini Kullanarak Çözüm

Kriterler Kümesi,

1. C1, toplandığında C2'den 2 ve C3'ten 3 kat önemlidir.
2. C2, C1'den yarım kat önemlidir.
3. C3, C1'den üçte bir kat önemlidir.

şeklinde belirtilmiştir. m(C1) = x, m(C2) = y, m(C3) = z olsun;

$$\begin{cases} x = 2y + 3z \\ y = \dfrac{x}{2} \\ z = \dfrac{x}{3} \end{cases}$$

AHP bu örneğe uygulanamaz çünkü ilk tercihin şekli ikili bir karşılaştırma değildir. Eğer mevcut haliyle eşitliklerin bu lineer homojen sistemini çözersek x = y = z = 0 elde ederiz zira eşlenik matrisi

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$$

Ama bu sıfır sonuçlu durum kabul edilemez zira x + y + z = 1 olmalıdır. Sağ taraf katsayılarının her birini parametreleştirelim ve yukarıdaki sistemin genel çözümünü elde edelim.

$$\begin{cases} x = 2\alpha_1 y + 3\alpha_2 z & (1) \\ y = \dfrac{\alpha_3}{2} x & (2) \\ z = \dfrac{\alpha_4}{3} x & (3) \end{cases}$$

Burada $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 > 0$'dır.

(1)'e (2) ve (3)'teki ifadeleri yerleştirirsek şunu elde ederiz:

$$x = 2\alpha_1\left(\frac{\alpha_3}{2}x\right) + 3\alpha_2\left(\frac{\alpha_4}{3}x\right)$$

$1 \cdot x = (\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4) \cdot x$ ifadesinden de $\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 = 1$ (parametrik eşitlik) (4)

Sistemin genel çözümü $\begin{cases} y = \frac{\alpha_3}{2}x \\ z = \frac{\alpha_4}{3}x \end{cases}$, buradan da öncelik vektörü: $\begin{bmatrix} x & \frac{\alpha_3}{2}x & \frac{\alpha_4}{3}x \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{\alpha_3}{2} & \frac{\alpha_4}{3} \end{bmatrix}$ olur.

Adillik İlkesi: Tüm katsayıları aynı yüzdeyle indirge. O halde, (4)'te $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha > 0$'ı yerine koyarsak $\alpha^2 + \alpha^2 = 1$, buradan $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ elde ederiz. Öncelik vektörümüz $\begin{bmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{6} \end{bmatrix}$ olur ve bunu normalleştirirsek $\begin{bmatrix} 0.62923 & 0.22246 & 0.14831 \\ C1 & C2 & C3 \\ x & y & z \end{bmatrix}$ sonucunca ulaşırız. Tercihimiz en büyük vektör bileşeni olan C1'den yana olacaktır. Bunu doğrulayalım:

$\frac{y}{x} \cong 0.35354$ olur 0.50 yerine; yani orijinal halinin $\frac{\sqrt{2}}{2} = \%70.71$'idir.

$\frac{z}{x} \cong 0.23570$ olur 0.333 yerine; yani orijinal halinin %70.71'idir.

$x \cong 1.41421y + 2.12132z$ olur $2y + 3z$ yerine; yani, 2'nin %70.71'i ve 3'ün %70.71'i'dir. Sonuç itibariyle, her bir katsayı için adil bir indirgeme yapılmış oldu.

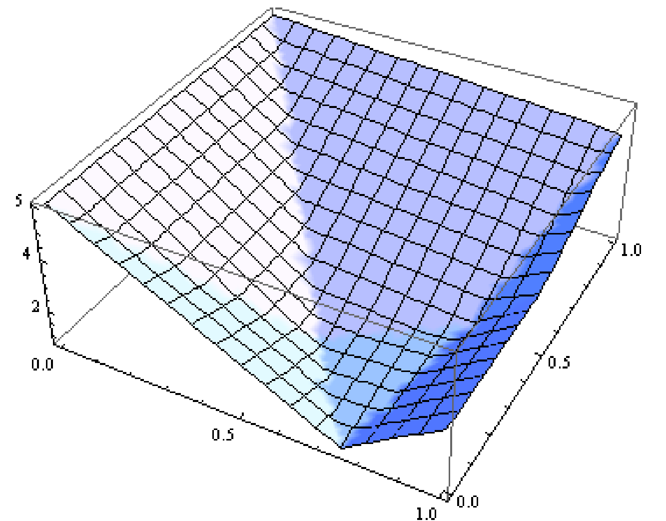
7.1.2 Mathematica 7.0 Yazılımını Kullanarak Çözüm

Mathematica 7.0 yazılımını kullanarak ilgili zayıf tutarlı karar verme problemini $x - 2y - 3z=0$, $x - 2y = 0$, $x - 3z = 0$, ve $x + y + z = 1$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ olarak temsil eden $g(x, y) = |4x - y-3| + |x - 2y| + |4x + 3y - 3|$, ve $x, y \in [0, 1]$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

$z = 1 - x –$ y'yi çözerek ve aşağıdaki fonksiyonda yerine koyarsak $G(x, y, z) = |x - 2y - 3z| + |x - 2y| + |x - 3z|$ ve $x>0$, $y>0$, $z>0$:

In[2]:=

```
Plot3D[Abs[4x-y-3]+Abs[x-2y]+Abs[4x+3y-3],{x,0,1},{y,0,1}]
```



Eğer varsa g(x, y)'nin minimum değerini buluruz:

In[3]:=

```
FindMinValue[{Abs[4x-y-3]+Abs[x-2y]+Abs[4x+3y-3],x+y≤1,x>0,y>0},{x,y}]
```

Aşağıdaki sonuç elde edilir:

Out[3]:= 0.841235.

FindMinValue::eit: The algorithm does not converge to the tolerance of 4.806217383937354`*^-6 in 500 iterations. The best estimated solution, with feasibility residual, KKT residual, or complementary residual of {0.0799888,0.137702,0.0270028}, is returned.

7.1.3 α-İ Kullanarak Matris Yöntemiyle Çözüm

(1), (2), (3) homojen lineer sisteminin determinantı:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2\alpha_1 & -3\alpha_2 \\ -\frac{1}{2}\alpha_3 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3}\alpha_4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1 + 0 + 0) - (\alpha_2\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3) = 0 \text{ veya } (\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4) = 1 \text{ (parametrik eşitlik).}$$

Sistemin sıfırlı olmayan çözüme sahip olması için determinant 0 olmalıdır. Matrisin mertebesi 2'dir. Böylelikle, iki değişken buluruz. Örneğin, son iki eşitlikten y ve z için x'e göre çözmek daha kolaydır:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}\alpha_3 x \\ z = \frac{1}{3}\alpha_4 x \end{cases}$$

ve öncesinde olduğu gibi prosedür aynı adımları takip eder.

Çeşitli durumları incelemek için Örnek 1'i değiştirelim.

7.2 Zayıf Tutarsız Örnek 3

Örnek 3, Örnek 2'ye göre zayıf tutarsızlık derecesi arttırılmış bir örnektir.

1. Örnek 2'dekinin aynısı (Bir araya getirildiğinde C1, C2'den 2 ve C3'ten 3 kat önemlidir).
2. C2, C1'den 4 kat önemlidir.
3. Örnek 2'dekinin aynısı (C3, C1'den üçte bir kat önemlidir).

$$\begin{cases} x = 2\alpha_1 y + 3\alpha_2 z \\ y = 4\alpha_3 x \\ z = \frac{\alpha_4}{3} x \end{cases}$$

$$x = 2\alpha_1(4\alpha_3 x) + 3\alpha_2\left(\frac{\alpha_4}{3}\right)x$$

$$1 \cdot x = (8\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4)x$$

$$8\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 = 1$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha > 0$$

$$9\alpha^2 = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3}$$

$$\begin{bmatrix} x & 4\alpha_3 x & \frac{\alpha_4}{3}x \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 4\alpha_3 & \frac{\alpha_4}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{9} & \frac{12}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

normalleştirme: $\begin{bmatrix} \frac{9}{22} & \frac{12}{22} & \frac{1}{22} \end{bmatrix}$

$\frac{y}{x} = 1.333$ olur 4 yerine;

$\frac{z}{x} = 0.111$ olur 0.3333 yerine;

x = 0.667y + 1z olur 2y + 3z yerine.

Her bir katsayı $\frac{1}{3} = \%33.33$ oranında indirgenmiştir. Tutarsızlık büyüdükçe (β→1) indirgeme oranı o kadar büyür (α→0).

7.3 Zayıf Tutarsız Örnek 4

Örnek 4, Örnek 3'ten bile daha tutarsız bir örnektir.

1. Örnek 2'dekinin aynısı (Bir araya getirildiğinde C1, C2'den 2 ve C3'ten 3 kat önemlidir).
2. Örnek 3'tekinin aynısı (C2, C1'den 4 kat önemlidir).
3. C3, C1'den 5 kat önemlidir.

$$\begin{cases} x = 2\alpha_1 y + 3\alpha_2 z \\ y = 4\alpha_3 x \\ z = 5\alpha_4 x \end{cases}$$

$$x = 2\alpha_1(4\alpha_3 x) + 3\alpha_2(5\alpha_4 x)$$

$$1 \cdot x = (8\alpha_1\alpha_3 + 15\alpha_2\alpha_4)x$$

$$\text{buradan} 8\alpha_1\alpha_3 + 15\alpha_2\alpha_4 = 1$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha > 0, 23\alpha^2 = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\sqrt{23}}{23}$$

$$[1 \quad 4\alpha_3 \quad 5\alpha_4] \rightarrow \left[1 \quad \frac{4\sqrt{23}}{23} \quad \frac{5\sqrt{23}}{23}\right]$$

Normalleştirme: $[0.34763 \quad 0.28994 \quad 0.36243]$. $\frac{\sqrt{23}}{23} = \%20.85$ oranında bir indirgemeyle;

$\frac{y}{x} \cong 0.83405$ olur 4 yerine; $\frac{z}{x} \cong 1.04257$ olur 5 yerine; x ≅ 0.41703y + 0.62554z olur 2x + 3y yerine.

Her bir katsayı $\alpha = \frac{\sqrt{23}}{23} = \%20.85$ oranında indirgenmiştir.

7.4 Tutarlı Örnek 5

α = 1 elde ettiğimizde tutarlı bir probleme sahip oluruz. Tercihlerin şöyle olduğunu varsayalım:

1. Örnek 2'dekinin aynısı (Bir araya getirildiğinde C1, C2'den 2 ve C3'ten 3 kat önemlidir).
2. C2, C1'den dörtte bir kat önemlidir.

3. C3, C1'den altıda bir kat önemlidir.

Sistemimiz şöyle olur:

$$\begin{cases} x = 2y + 3z \\ y = \dfrac{x}{4} \\ z = \dfrac{x}{6} \end{cases}$$

7.4.1 Bu Sistemi Çözmenin İlk Yolu

Bu sistemin ikinci ve üçüncü eşitliklerini birincide yerine koyarsak, şunu elde ederiz:

$x = 2\left(\dfrac{x}{4}\right) + 3\left(\dfrac{x}{6}\right) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{2} = x$ ki bu bir özdeşliktir (böylece çelişki yoktur).

Genel çözüm: $\begin{bmatrix} x & \dfrac{x}{4} & \dfrac{x}{6} \end{bmatrix}$

Öncelik vektörü: $\begin{bmatrix} 1 & \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{6} \end{bmatrix}$

Normalleştirme: $\begin{bmatrix} \dfrac{12}{17} & \dfrac{3}{17} & \dfrac{2}{17} \end{bmatrix}$

7.4.2 Bu Sistemi Çözmenin İkinci Yolu

Parametreleştirelim:

$$\begin{cases} x = 2\alpha_1 y + 3\alpha_2 z \\ y = \dfrac{\alpha_3}{4} x \\ z = \dfrac{\alpha_4}{6} x \end{cases}$$

Son iki eşitliğimizi birincide yerine koyarsak şunu elde ederiz:

$$x = 2\alpha_1\left(\frac{\alpha_3}{4} x\right) + 3\alpha_2\left(\frac{\alpha_4}{6} x\right) = \frac{\alpha_1\alpha_3}{2} x + \frac{\alpha_2\alpha_4}{2} x$$

$$1 \cdot x = \frac{\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4}{2} x,$$

Buradan $1 = \dfrac{\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4}{2}$ veya $\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 = 2$ olur.

Adillik ilkesini göz önünde bulundurun: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha > 0$, öyleyse $2\alpha^2 = 1$, $\alpha = \pm 1$ ama sadece pozitif değer $\alpha = 1$'i alırız (tutarlı bir problemden beklendiği gibi). Kontrol edelim:

$\frac{y}{x} = \frac{\frac{3}{17}}{\frac{12}{17}} = \frac{1}{4}$, aynen orijinal sistemde olduğu gibi; $\frac{z}{x} = \frac{\frac{2}{17}}{\frac{12}{17}} = \frac{1}{6}$, aynen orijinal sistemde olduğu gibi;

x = 2y + 3z zira $x = 2\left(\frac{x}{4}\right) + 3\left(\frac{x}{6}\right)$; sonuç itibariyle tüm katsayılar α = 1 olarak orijinal hallerinde kaldı. Herhangi bir indirgemeye gerek görülmedi.

7.5 Genel Örnek 6

Şu genel durumu dikkate alalım:

$a_1, a_2, a_3, a_4 > 0$ iken $\begin{cases} x = a_1 y + a_2 z \\ y = a_3 x \\ z = a_4 x \end{cases}$ olsun. Parametrik hale getirelim:

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 > 0$ iken $\begin{cases} x = a_1\alpha_1 y + a_2\alpha_2 z \\ y = a_3\alpha_3 x \\ z = a_4\alpha_4 x \end{cases}$ olur. İkinci ve üçüncü eşitlikleri birincide yerine koyarsak

$x = a_1\alpha_1(a_3\alpha_3 x) + a_2\alpha_2(a_4\alpha_4 x)$

$x = a_1a_3\alpha_1\alpha_3 x + a_2a_4\alpha_2\alpha_4 x$

Buradan $a_1a_3\alpha_1\alpha_3 x + a_2a_4\alpha_2\alpha_4 x = 1$ (parametrik eşitliği) elde edilir.

Bu sistemin genel çözümü, $(x, a_3\alpha_3 x, a_4\alpha_4 x)$ ve öncelik vektörü, $[1 \quad a_3\alpha_3 \quad a_4\alpha_4]$ şeklindedir.

Adillik İlkesini dikkate alırsak: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha > 0$ şunu elde ederiz: $\alpha^2 = \frac{1}{a_1a_3 + a_2a_4}$, böylece $\alpha = \frac{1}{\sqrt{a_1a_3 + a_2a_4}}$ ulaşılır.

i) Eğer $\alpha \in [0,1]$ ise, o halde α problemin tutarlılık derecesiyken β = 1 – α problemin tutarsızlık derecesidir.

ii) Eğer α > 1 ise, o halde $\frac{1}{\alpha}$ problemin tutarlılık derecesiyken $\beta = 1 - \frac{1}{\alpha}$ problemin tutarsızlık derecesidir.

Tutarlılık derecesi → 0 olduğu zaman tutarsızlık derecesi → 1 olur. (Karşılıklı durum da geçerlidir).

Genel Örnek 6 için Tartışma

a_1, a_2, a_3, a_4 katsayılarının $a_1a_3 + a_2a_4 \to \infty$ olacak şekilde büyük değerler aldığını varsayalım, o zaman $\alpha \to 0$ ve $\beta \to 1$ olur.

Özel Örnek 7

a_1, a_2, a_3, a_4'ün $a_1a_3 + a_2a_4$'ü büyük yaptığı özel bir durumu görelim: $a_1 = 50$ $a_2 = 20$ $a_3 = 100$ $a_4 = 250$ olsun.

Bu durumda, tutarlılık derecesi = $\alpha = \frac{1}{\sqrt{50 \cdot 100 + 20 \cdot 250}} = \frac{1}{\sqrt{10000}} = \frac{1}{100} = 0.01$, ve tutarsızlık derecesi = β = 0.99'dur.

Özel Örnek 7'nin öncelik vektörü [1 100(0.01) 250(0.01)] = [1 1 2.5], normalleştirilmiş hali $\begin{bmatrix} \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{5}{9} \end{bmatrix}$ olur.

Özel Örnek 8

Başka bir durum da a_1, a_2, a_3, a_4'ün $a_1a_3 + a_2a_4$'ü çok küçük yaptığı bir durumdur: $a_1 = 0.02$ $a_2 = 0.05$ $a_3 = 0.03$ $a_4 = 0.02$ olsun.

Bu durumda, $\alpha = \frac{1}{\sqrt{0.02 \cdot 0.03 + 0.05 \cdot 0.02}} = \frac{1}{0.04} = 25 > 1$ olarak elde edilir. O halde $\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{25} = 0.04$ problemin tutarlılık derecesidir ve tutarsızlık derecesi de 0.96'dır.

Özel Örnek 8'in öncelik vektörü [1 a_3α a_4α] = [1 0.03(25) 0.02(25)] = [1 0.75 0.50], normalleştirilmiş hali $\begin{bmatrix} \frac{4}{9} & \frac{3}{9} & \frac{3}{9} \end{bmatrix}$ olur. Doğrulayalım:

$\frac{y}{x} = \frac{\frac{3}{9}}{\frac{4}{9}} = 0.75$ olur 0.03 yerine; yani α = 25 kez (ya da %2500) daha büyüktür;

$\frac{z}{x} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{4}{9}} = 0.50$ olur 0.02 yerine; yani α = 25 kez daha büyüktür;

x = 0.50y + 1.25z olur x = 0.02y + 0.05z yerine (Hem 0.50, 0.02'den hem de 1.25, 0.05'ten 25 kez büyüktür); çünkü $\frac{4}{9} = 0.50\left(\frac{3}{9}\right) + 1.25\left(\frac{2}{9}\right)$.

8 Jean Dezert'in Zayıf Tutarsız Örnekleri

8.1 Jean Dezert'in Zayıf Tutarsız Örneği 9

α_1, α_2, α_3, $\alpha_4 > 0$ parametrelerimiz olsun. O halde:

$$\begin{cases} (5) \quad \frac{y}{x} = 3\alpha_1 \\ (6) \quad \frac{x}{z} = 4\alpha_2 \\ (7) \quad \frac{y}{z} = 5\alpha_3 \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} (5) \quad \frac{y}{x} = 3\alpha_1 \\ (6) \quad \frac{x}{z} = 4\alpha_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{y}{x} \cdot \frac{x}{z} = (3\alpha_1) \cdot (4\alpha_2) \Rightarrow \frac{y}{z} = 12\alpha_1\alpha_2$$

$\frac{y}{z} = 12\alpha_1\alpha_2$ eşitliğinin $\frac{y}{z} = 5\alpha_3$ ile tutarlı olması için $12\alpha_1\alpha_2 = 5\alpha_3$ eşitliğine veya

$2.4\alpha_1\alpha_2 = \alpha_3$ (parametrik eşitliğine) (8)

sahip olmamız gerekir. Bu sistemi çözersek:

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = 3\alpha_1 \Rightarrow y = 3\alpha_1 \cdot x \\ \frac{x}{z} = 4\alpha_2 \Rightarrow x = 4\alpha_2 \cdot z \\ \frac{y}{z} = 5\alpha 3 \Rightarrow y = 12\alpha_1\alpha_2 z \end{cases}$$

şu genel çözümü elde ederiz:

$[4\alpha_2 z \quad 5(2.4\alpha_1\alpha_2)z \quad z]$

$[4\alpha_2 z \quad 12\alpha_1\alpha_2 z \quad z]$

Genel normalleştirip öncelik vektörü: $\left[\frac{4\alpha_2}{4\alpha_2 + 12\alpha_1\alpha_2 + 1} \quad \frac{12\alpha_1\alpha_2}{4\alpha_2 + 12\alpha_1\alpha_2 + 1} \quad \frac{1}{4\alpha_2 + 12\alpha_1\alpha_2 + 1}\right]$, burada $\alpha_1, \alpha_2 > 0$; ($\alpha_1\alpha_2 = 2.4\alpha_1\alpha_2$).

Hangi α_1 ve α_2 en iyi sonucu verir? Bunu nasıl ölçmek gerekir? Bu en büyük zorluktur. α-İndirgeme Yöntemi tüm çözümleri (matrisi tutarlı yapan tüm olası öncelik vektörleri) içerir.

Tüm orantılarla tutarlı olmamız (yani parametrelerin sayısal değerlerini bulmak için Adillik İlkesini kullanmak) gerektiğinden tüm üç orantıya (5), (6), (7)'ye aynı indirgeme olmalıdır; buradan

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 > 0$ (9)

Parametrik eşitlik (8) $2.4\alpha_1^2 = \alpha_1$ veya $2.4\alpha_1^2 - \alpha_1 = 0$, $\alpha_1(2.4\alpha_1 - 1) = 0$, buradan $\alpha_1 = 0$ veya $\alpha_1 = \frac{1}{2.4} = \frac{5}{12}$. (9) ile çeliştiğinden $\alpha_1 = 0$ reddedilir. Sistemimiz şu hale gelir:

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = 3 \cdot \frac{5}{12} = \frac{15}{12} & (10) \\ \frac{x}{z} = 4 \cdot \frac{5}{12} = \frac{20}{12} & (11) \\ \frac{y}{z} = 5 \cdot \frac{5}{12} = \frac{25}{12} & (12) \end{cases}$$

(10) ve (11)'in beraber şunu ortaya çıkardığını görüyoruz: $\frac{y}{x} \cdot \frac{x}{z} = \frac{15}{12} \cdot \frac{20}{12}$ veya $\frac{y}{z} = \frac{25}{12}$, böylece (12) ile şimdi tutarlı hale gelmiştir. (11)'den $x = \frac{20}{12}z$ ve (12)'den $y = \frac{25}{12}z$ elde ederiz. Öncelik vektörü $\left[\frac{20}{12}z \quad \frac{25}{12}z \quad 1z\right]$ ve normalleştirilmiş hali $\frac{\frac{20}{12}}{\frac{20}{12} + \frac{25}{12} + 1} = \frac{\frac{20}{12}}{\frac{20}{12} + \frac{25}{12} + \frac{12}{12}} = \frac{20}{57}, \frac{\frac{25}{12}}{\frac{57}{12}} = \frac{25}{57}, \frac{1}{\frac{57}{12}} = \frac{12}{57}$; yani

$$\begin{matrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{matrix}$$
$$\begin{bmatrix} \frac{20}{57} & \frac{25}{57} & \frac{12}{57} \end{bmatrix}^T \qquad (13)$$

$$\begin{matrix} & C_1 & C_2 & C_3 \end{matrix}$$
$$\cong [0.3509 \quad \boxed{0.4386} \quad 0.2105]^T \text{ olur.}$$

en yüksek öncelik

Sonucu inceleyelim:

$$\begin{matrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{matrix}$$
$$\begin{bmatrix} \frac{20}{57} & \frac{25}{57} & \frac{12}{57} \end{bmatrix}^T$$
$$\begin{matrix} x & y & z \end{matrix}$$

<u>Oranlar:</u>

$$\frac{y}{x} = \frac{\frac{25}{57}}{\frac{20}{57}} = \frac{25}{20} = 1.25 \text{ olur 3 yerine;}$$

$$\frac{x}{z} = \frac{\frac{20}{57}}{\frac{12}{57}} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3} = 1.\overline{6} \text{ olur 4 yerine;}$$

$$\frac{y}{z} = \frac{\frac{25}{57}}{\frac{12}{57}} = \frac{25}{12} = 2.08\overline{3} \text{ olur 5 yerine;}$$

<u>İndirgeme Yüzdesi:</u>

$$\frac{\frac{25}{20}}{3} = \frac{5}{12} = \alpha_1 = \%41.\overline{6}$$

$$\frac{\frac{20}{12}}{4} = \frac{5}{12} = \alpha_1 = \%41.\overline{6}$$

$$\frac{\frac{25}{12}}{5} = \frac{5}{12} = \alpha_1 = \%41.\overline{6}$$

Sonuç itibariyle problemde sırasıyla 3, 4 ve 5'e ait eşit olan tüm orijinal orantılar aynı faktörle ($\alpha_1 = \frac{5}{12}$) çarpılarak indirgenmiştir; yani her birinin %41.6'sı alınmıştır.

Böylelikle her bir faktörü kendisinin %41.6'sına indirgemek adil olmuştur. Ama Saaty'nin yönteminde durum böyle değildir. Normalleştirilmiş öncelik vektörü:

$$\begin{matrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{matrix}$$
$$[0.2797 \quad 0.6267 \quad 0.0936]^T$$
$$\begin{matrix} x & y & z \end{matrix}$$

şeklindedir. Burada,

<u>Oranlar:</u>

$$\frac{y}{x} = \frac{0.6267}{0.2797} \cong 2.2406 \text{ olur 3 yerine;}$$

$$\frac{x}{z} = \frac{0.2797}{0.0936} \cong 2.29882 \text{ olur 4 yerine;}$$

$$\frac{y}{z} = \frac{0.6267}{0.0936} \cong 6.6955 \text{ olur 5 yerine;}$$

<u>İndirgeme Yüzdesi:</u>

$$\frac{2.2406}{3} \cong \%74.6867$$

$$\frac{2.29882}{4} \cong \%74.7050$$

$$\frac{6.6955}{5} \cong \%133.9100$$

Örneğin niye 3'e eşit olan ilk orantı %74.6867'sine indirgenirken 4'e eşit olan ikinci orantı (yakın da olsa) diğer bir yüzde olan % 74.7050'sine indirgenmiştir?

Hatta daha da şüphe çekeni 5'e eşit olan üçüncü orantımızın katsayısı %133.9100'ına yükseltgenirken önceki iki orantımız indirgenmişti. Bunlar için ne gibi bir makul açıklama vardır?

İşte bundandır ki α-İ/Adillik İlkesinin daha iyi gerekçeli olduğunu düşünüyoruz. Aynı problemi matrisleri kullanarak da çözebiliriz. (5), (6), (7) lineer parametrik homojen bir sistem oluşturmak için başka bir şekilde yazılabilir:

$$\begin{cases} 3\alpha_1 - y = 0 \\ x - 4\alpha_2 z = 0 \\ y - 5\alpha_3 z = 0 \end{cases} \tag{14}$$

Eşlenik matrisi de:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 3\alpha_1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -4\alpha_2 \\ 0 & 1 & -5\alpha 3 \end{bmatrix} \tag{15}$$

a) Eğer det(P_1) ≠ 0 o halde (10)'daki sistemin sadece x = y = z = 0 sıfırlı çözümü vardır.

b) Dolayısıyla, det(P_1) = 0 veya $(3\alpha_1)(4\alpha_2) - 5\alpha_3 = 0$ veya $2.4\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3 = 0$'a sahip olmamız gerekir, böylelikle (8)'deki aynı parametrik eşitliği elde ederiz.

Bu durumda homojen parametrik lineer sistem (14)'ün üçlü sonsuz çözümü vardır.

Bu yöntem Saaty'nin yönteminin bir genişletmesidir, zira α_1, α_2 ve α_3 parametrelerini manipüle etme imkânımız vardır.

Örneğin, eğer ikinci bir kaynak bize $\frac{x}{z}$'nin $\frac{y}{x}$'in 2 katı kadar indirgenmesi ve $\frac{y}{z}$'nin $\frac{y}{x}$'ten 3 kat daha az indirgenmesi gerektiğini söylerse o zaman $\alpha_2 = 2\alpha_1$ ve buna bağlı olarak $\alpha_3 = \frac{\alpha_1}{3}$'e eşitleriz ve orijinal (5), (6), (7) sistemi aşağıdakine dönüşür:

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = 3\alpha_1 \\ \frac{x}{z} = 4\alpha_2 = 4(2\alpha_1) = 8\alpha_1 \\ \frac{y}{z} = 5\alpha_3 = 5\left(\frac{\alpha_1}{3}\right) = \frac{5}{3}\alpha_1 \end{cases} \tag{16}$$

ve bunu da aynı yolla çözeriz.

8.2 Zayıf Tutarsız Örnek 10

Jean Dezert'in Zayıf Tutarsız Örnek 9'unu bir tercih daha ekleyerek karmaşıklaştıralım:

C_2'yi, C_1 ve C_3'ün toplamına 1.5 kat tercih edelim.

Yeni sistem:

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = 3 \\ \frac{x}{z} = 4 \\ \frac{y}{z} = 5 \\ y = 1.5(x + z) \\ x, y, z \in 0,1 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \tag{17}$$

Parametreleştirirsek:

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = 3\alpha_1 \\ \frac{x}{z} = 4\alpha_2 \\ \frac{y}{z} = 5\alpha_3 \\ y = 1.5\alpha_4(x + z) \\ x, y, z \in 0,1 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \tag{18}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 > 0$

Eşlenik matrisi:

$$P_2 = \begin{bmatrix} 3\alpha_1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -4\alpha_2 \\ 0 & 1 & -5\alpha_3 \\ 1.5\alpha_4 & -1 & 1.5\alpha_4 \end{bmatrix} \tag{19}$$

P_2 matrisinin mertebesi (18)'deki sistemin sıfırlı olmayan bir sonuca sahip olması için kesinlikle 3'ten az olmalıdır. Eğer (19)'daki ilk üç satırı alırsak (determinantı 0 olması gereken) P_1 matrisini elde ederiz, dolayısıyla bundan önceki $2.4\alpha_1 4\alpha_2 = \alpha_3$ parametrik eşitliğini elde ederiz.

Eğer 1, 3 ve 4. satırları alırsak, bunlar C2 ve diğer C1 ve C3 kriterleri içerdiğinden determinantı 0 olması gereken şu matrisi elde ederiz:

$$P_3 = \begin{bmatrix} 3\alpha_1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -5\alpha_3 \\ 1.5\alpha_4 & -1 & 1.5\alpha_4 \end{bmatrix} \tag{20}$$

$$\det(P_3) = [3\alpha_1 (1.5\alpha_4) + 5\alpha_3 (1.5\alpha_4) + 0] - [0 + 3\alpha_1 (5\alpha_3) + 0] = 4.5\alpha_1\alpha_4 + 7.5\alpha_3\alpha_4 - 15\alpha_1\alpha_3 = 0 \tag{21}$$

Eğer yandakini alırsak: $$P_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4\alpha_2 \\ 0 & 1 & -5\alpha_3 \\ 1.5\alpha_4 & -1 & 1.5\alpha_4 \end{bmatrix} \tag{22}$$

O halde det(P_4) = [1.5α_4 + 0 + 0] – [-6$\alpha_2\alpha_4$ + 5α_3 + 0] = 1.5α_4 + 6$\alpha_2\alpha_4$ – 5α_3 = 0 (23)

Eğer şunu alırsak

$$P_5 = \begin{bmatrix} 3\alpha_1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -4\alpha_2 \\ 1.5\alpha_4 & -1 & 1.5\alpha_4 \end{bmatrix} \quad (24)$$

O halde det(P_5) = [0 + 0 + 6 $\alpha_2\alpha_4$] – [0 + 12$\alpha_1\alpha_2$ – 1.5α_4] = 6$\alpha_2\alpha_4$ – 12 $\alpha_1\alpha_4$ + 1.5α_4 = 0 (25)

Böylelikle, bu dört parametrik eşitlik bir parametrik sistem oluşturur ki bunun sıfırlı olmayan bir çözümü olması gerekmektedir:

$$\begin{cases} 2.4\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ 4.5\alpha_1\alpha_4 + 7.5\alpha_3\alpha_4 - 15\alpha_1\alpha_3 = 0 \\ 1.5\alpha_4 + 6\alpha_2\alpha_4 - 5\alpha_3 = 0 \\ 6\alpha_2\alpha_4 - 12\alpha_1\alpha_2 + 1.5\alpha_4 = 0 \end{cases} \quad (26)$$

Eğer başta elde ettiğimiz gibi $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{5}{12} > 0$'ı dikkate alırsak ve sonra (26)'daki sistemin son üç eşitliğindeki tüm α'ları bu değerle değiştirirsek şunu elde ederiz:

$$4.5\left(\frac{5}{12}\right)\alpha_4 + 7.5\left(\frac{5}{12}\right)\alpha_4 - 15\left(\frac{5}{12}\right)\left(\frac{5}{12}\right) = 0 \Rightarrow \alpha_4 = 0.5208\overline{3} = \frac{25}{48}$$

$$1.5\alpha_4 + 6\left(\frac{5}{12}\right)\alpha_4 - 5\left(\frac{5}{12}\right) = 0 \Rightarrow \alpha_4 = 0.5208\overline{3}$$

$$6\left(\frac{5}{12}\right)\alpha_4 - 12\left(\frac{5}{12}\right)\left(\frac{5}{12}\right) + 1.5\alpha_4 = 0 \Rightarrow \alpha_4 = 0.5208\overline{3}$$

α_4, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$'e eşit olamazdı çünkü α_4 ek bir tercihtir, zira satırların sayısı sütunların sayısından büyüktür.

Sonuç itibariyle, y = 1.5(x + z) dördüncü tercihini eklemek zorunda kalmadan sistem öncekiyle aynı çözüme sahiptir ve tutarlıdır.

9 Jean Dezert'in Güçlü Tutarsız Örnekleri

9.1 Jean Dezert'in Güçlü Tutarsız Örneği 11

9.1.1 Problem Tanımı

Tercih matrisimiz: $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 9 & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & 1 & 9 \\ 9 & \frac{1}{9} & 1 \end{pmatrix}$,

böylelikle, $\begin{cases} x = 9y, x > y \\ x = \frac{1}{9}z, x < z \\ y = 9z, y > z \end{cases}$ ulaşılabilir.

Diğer üç eşitlik olan $y = \frac{1}{9}x, z = 9x, z = \frac{1}{9}y$ diğer üç eşitlikten doğrudan çıkarılabildiğinden bunları eleyebiliriz.

(Yukarıdaki birinci ve üçüncü eşitsizliklerdeki) x > y ile y > z'den x > z'ye ulaşabiliriz ancak ikinci eşitsizlik bize tam tersi olan x < z ifadesini vermektedir; bu sebepten dolayı güçlü bir çelişki/tutarsızlık ile karşı karşıyayız. Ya da, her üçünü birleştirirsek x > y > z > x'i elde ederiz ki bu da yine güçlü bir tutarsızlıktır.

Parametreleştirelim: (burada α_1, α_2, α_3 > 0'dır)

$$\begin{cases} x = 9\alpha_1 y & (27) \\ x = \frac{1}{9}\alpha_2 z & (28) \\ y = 9\alpha_3 z & (29) \end{cases}$$

(27)'den $y = \frac{1}{9\alpha_1}x$'i, (28)'den $z = \frac{1}{9\alpha_2}x$'i elde ederiz. Bu (29)'da yerine konduğunda $y = 9\alpha_3\left(\frac{9}{\alpha_2}x\right) = \frac{81\alpha_3}{\alpha_2}x$'e ulaşırız. Böylece $\frac{1}{9\alpha_1}x = \frac{81\alpha_3}{\alpha_2}x$ veya $\alpha_2 = 729\alpha_1\alpha_3$ (parametrik eşitlik) olur.

Sistemin genel çözümü: $\left(x, \quad \frac{1}{9\alpha_1}x, \quad \frac{9}{\alpha_2}x\right)$ ve genel öncelik vektörü de $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{9\alpha_1} & \frac{9}{\alpha_2} \end{bmatrix}$'dir.

Adillik İlkesini dikkate alırsak, o zaman $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha > 1$ parametrik eşitlik $\alpha = 729\alpha^2$'de yerine konur. Buradan α = 0 (iyi değil) ve $\alpha = \frac{1}{729} = \frac{1}{9^3}$'dür. Özel öncelik vektörü [1 9^2 9^4] = [1 81 6561] ve normalleştirilmiş hali de $\begin{bmatrix} \frac{1}{6643} & \frac{81}{6643} & \frac{6561}{6643} \end{bmatrix}$ olarak bulunur. Tutarlılık $\alpha = \frac{1}{729} = 0.00137$ aşırı derecede düşük (ve tutarsızlık β = 1 – α = 0.99863 çok büyük) çıktığından bu sonucu ihmal edebiliriz.

9.1.2 Açıklamalar:

a) Eğer M_1'de altı tane 9'u daha büyük bir sayı ile değiştirdiğimizde sistemin tutarsızlığı artar. Mesela 11'i kullanalım. $\alpha = \frac{1}{11^3} = 0.00075$ (tutarlılık) olurken tutarsızlık β = 0.99925 olur.

b) M_1'deki tüm 9'ları 1'den daha büyük ancak 9'dan küçük bir sayı ile değiştirdiğimizde sistemin tutarlılığı düşer. Mesela 2'yi kullanalım. $\alpha = \frac{1}{2^3} = 0.125$ ve β = 0.875 olur.

c) Tüm 9'ları 1 ile değiştirdiğimizde tutarlılık 1 olur.

d) Yine tüm 9'ları 1'den küçük pozitif bir sayıyla değiştirirsek tutarlılık tekrar düşer. Örneğin, 0.8 ile değiştirecek olursak $\alpha = \frac{1}{0.8^3} = 1.953125 > 1$, buradan $\alpha = \frac{1}{\alpha} = 0.512$ (tutarlılık) ve β = 0.488 (tutarsızlık) olur.

9.2 Jean Dezert'in Güçlü Tutarsız Örneği 12

M1'e benzer olan ancak tüm 9'ların yerini 5'lerin aldığı tercih matrisimiz şu şekilde olsun:

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & 1 & 5 \\ 5 & \frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix}, \ \alpha = \frac{1}{5^3} = 0.008 \text{ (tutarlılık) ve } \beta = 0.992 \text{ (tutarsızlık) olur.}$$

Öncelik vektörü [1 5^2 5^4] ve normalleştirilmiş hali $\begin{bmatrix} \frac{1}{651} & \frac{25}{651} & \frac{625}{651} \end{bmatrix}$ olarak bulunur. M2, M1'den biraz daha tutarlıdır çünkü 0.008 > 0.00137, ancak yine de bu yeterli değildir, bu yüzden bu sonuç da ihmal edilmiştir.

9.3 Jean Dezert'in Güçlü Tutarsız Örneklerinin Genelleştirmesi

Genel Örnek 13 için tercih matrisimiz şöyle olsun:

$$M_t = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{t} \\ \frac{1}{t} & 1 & t \\ t & \frac{1}{t} & 1 \end{pmatrix},$$

t > 0 ve $c(M_t)$ M_t'nin tutarlılığı, $i(M_t)$ M_t'nin tutarsızlığı olsun. Adillik İlkesi için şunlara sahibiz:

$$\lim_{t\to 1} c(M_t) = 1 \text{ ve } \lim_{t\to 1} i(M_t) = 0;$$
$$\lim_{t\to +\infty} c(M_t) = 0 \text{ ve } \lim_{t\to +\infty} i(M_t) = 1;$$
$$\lim_{t\to 0} c(M_t) = 0 \text{ ve } \lim_{t\to 0} i(M_t) = 1.$$

Aynı zamanda $\alpha = \frac{1}{t^3}$, öncelik vektörü [1 t^2 t^4] ve normalleştirilmiş hali de $\begin{bmatrix} \frac{1}{1+t^2+t^4} & \frac{t^2}{1+t^2+t^4} & \frac{t^4}{1+t^2+t^4} \end{bmatrix}$'tür.

x > y > z > x veya benzer şekilde x < y < x vb. haldeki güçlü çelişkinin bulunduğu ve tutarlılığın çok küçük olduğu durumlarda, ya x = y = z = ⅓ (böylece, Saaty'nin AHP'sinde olduğu gibi, hiçbir kriter diğerine tercih edilir durumda olmaz) ya da x + y + z = 1'i (ki C1 ∪ C2 ∪ C3 şeklinde toplam bilinmezliğe de sahip olunduğu anlamına gelir) dikkate alabiliriz.

10 Güçlü Tutarsız Örnek 14

C = {C1, C2} ve P = {C1, C2'den iki kat daha fazla önemli; C2, C1'den beş kat daha fazla önemli} şeklinde olsun. m(C1) = x, m(C2) = y şeklinde ifade edilsin. O halde, x = 2y ve y = 5x olur (burada güçlü bir tutarsızlık vardır zira birinci eşitlikten x > y elde edilirken ikincisinden y > x elde edilmektedir).

Parametreleştirelim: $x = 2\alpha_1 y$, $y = 5\alpha_2 x$, buradan $2\alpha_1 = \frac{1}{5\alpha_2}$ veya $10\alpha_1\alpha_2 = 1$ ifadesine ulaşırız.

Eğer Adillik İlkesini dikkate alırsak, o zaman $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha > 0$ ki bu durumda $\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10} \approx \%31.62$ tutarlılık ile [0.39 0.61] öncelik vektörüne ulaşılır, sonuç itibariyle y > x'tir. Tutarlılık ötesi (veya nötrosofik) mantıkta olduğu gibi bir açıklama şöyle yapılabilir: Tercihlerin dürüst ancak öznel olduğunu dikkate alırız, dolayısıyla eşanlı olarak doğru olan iki çelişen ifadeye sahip olmak mümkündür, zira bir bakış açısına göre C1 kriteri C2'den daha önemli olabilirken başka bir bakış açısına göreyse C2 kriteri C1'den daha önemli olabilir. Karar verme problemimizde daha fazla bilgi sahibi olamayışımız ve hızlıca bir karar alma durumunda kalışımızdan C2'yi tercih edebiliriz, zira C2 kriteri C1'den 5 kat daha fazla önemliyken C1 kriteri C2'den ancak 2 kat daha fazla önemlidir; yani 5 > 2'dir.

Eğer bir acele yoksa, bu gibi bir ikilemde C1 ve C2 üzerinde daha fazla araştırma yaparak daha tedbirli olunmasında fayda vardır.

Eğer Örnek 14'ü x = 2y ve y = 2x şeklinde değiştirirsek (iki katsayı birbirine eşitlendi), α = ½ elde ederiz. Böylece öncelik vektörü [0.5 0.5] olur ve bu durumda karar verme problemi karar verilemez bir hale dönüşür.

11 Lineer Olmayan Eşitlik Sistemi Örneği 15

C = {C1, C2, C3} ve m(C1) = x, m(C2) = y, m(C3) = z olsun.

F de şu şekilde verilsin:

1. C1, C2 ve C3'ün çarpımından iki kat daha fazla önemli.
2. C2, C3'ten 5 kat daha fazla önemli.

Şu sistemi oluştururuz: x = 2yz (lineer olmayan eşitlik) ve y = 5z (lineer eşitlik). Bu karma sistemin genel çözüm vektörü: $[10z^2 \;\; 5z \;\; z]$, z > 0'dır. Bir irdeleme yapacak olursak:

a) y > z olduğunu kesin olarak görmekteyiz zira kesin surette pozitif z için 5z > z'dir. Ancak x'in pozisyonu ne olurdu ile ilgili bir şey görmemekteyiz.

b) Her bir vektör bileşenini z > 0 ile bölerek genel çözüm vektörünü sadeleştirelim. Sonuç olarak [10z 5 1] vektörünü elde ederiz.

   Eğer z ∈ (0, 0.1) ise o zaman y > z > x.

   Eğer z = 0.1 ise o zaman y > z = x.

   Eğer z ∈ (0.1, 0.5) ise o zaman y > x > z.

   Eğer z = 0.5 ise o zaman y = x > z.

   Eğer z > 0.5 ise o zaman x > y > z.

12 Karma Lineer Olmayan/Lineer Eşitlik/Eşitsizlik Sistemi Örneği 16

Önceki Örnek 15'in çok fazla değişik biçimleri olduğundan (önceki iki tercihe ek olarak) yeni bir tercihin sisteme dahil edildiğini varsayalım: *3. C1, C3'ten daha az önemlidir.*

Karma sistem şimdi şu duruma ulaşır: x = 2yz (lineer olmayan eşitlik), y = 5z (lineer eşitlik), ve x < z (lineer eşitsizlik).

Bu karma sistemin genel çözüm vektörü: [$10z^2$ 5z z], burada $z > 0$ ve $10z^2 < z$'dir. Son iki eşitsizlikten $z \in (0, 0.1)$ elde ederiz. Buradan öncelikler $y > z > x$ olur.

13 İleriki Araştırmalar

α-İ ÇKKV ile ideal çözüme benzerlik yoluyla tercih sıralama tekniği (TOPSIS), basit toplamlı ağırlıklandırma (SAW), sıra sayılı tercihlerin bütünleştirildiği Borda-Kendall (BK) yöntemi, veri zarflama analizindeki (DEA) çapraz etkinlik değerlendirme yöntemi gibi diğer yöntemler arasındaki bağı araştırmak.

14 Sonuç

Çok Kriterli Karar Verme için "α-İndirgeme ÇKKV" adını verdiğimiz yeni bir yöntemi tanıttık. Bu yöntemin ilk kısmında her bir tercih lineer veya lineer olmayan eşitlik veya eşitsizliğe dönüştürülmekte ve hepsi beraber çözülen bir sistemi – pozitif sonuçların ortaya konduğu genel çözümü bulunur – oluşturmaktadır. Eğer sistem sadece sıfırlı bir çözüme sahipse veya tutarsızsa, sistemin katsayıları parametrik hale getirilir.

Bu yöntemin ikinci kısmında parametrelerin sayısal değerlerini bulmak için bir ilke seçilir (Biz burada Adillik İlkesi, İndirgeme için Uzman Görüşü veya Tutarlılık/Tutarsızlık Eşiği belirlemeyi önerdik).

Teşekkür

Yazar, KHO SAVBEN Harekat Araştırması Bölümü'nde (Ankara, Türkiye) doktora öğrencisi olan ve doktora tezinde Çok Kriterli Karar Verme için α-İndirgeme Yöntemini kullanan Atilla Karaman'a bu makaleyle ilgili gözlemlerinden dolayı teşekkür eder.

Kaynakça

[1] J. Barzilai, *Notes on the Analytic Hierarchy Process*, Proc. of the NSF Design and Manufacturing Research Conf., pp. 1–6, Tampa, Florida, January 2001.

[2] V. Belton, A.E. Gear, *On a Short-coming of Saaty's Method of Analytic Hierarchies*, Omega, Vol. 11, No. 3, pp. 228–230, 1983.

[3] M. Beynon, B. Curry, P.H. Morgan, *The Dempster-Shafer theory of evidence: An alternative approach to multicriteria decision modeling*, Omega, Vol. 28, No. 1, pp. 37–50, 2000.

[4] M. Beynon, D. Cosker, D. Marshall, *An expert system for multi-criteria decision making using Dempster-Shafer theory*, Expert Systems with Applications, Vol. 20, No. 4, pp. 357–367, 2001.

[5] E.H. Forman, S.I. Gass, *The analytical hierarchy process: an exposition*, Operations Research, Vol. 49, No. 4 pp. 46–487, 2001.

[6] R.D. Holder, *Some Comment on the Analytic Hierarchy Process*, Journal of the Operational Research Society, Vol. 41, No. 11, pp. 1073–1076, 1990.

[7] F.A. Lootsma, *Scale sensitivity in the multiplicative AHP and SMART*, Journal of Multi-Criteria Decision Analysis, Vol. 2, pp. 87–110, 1993.

[8] J.R. Miller, *Professional Decision-Making*, Praeger, 1970.

[9] J. Perez, *Some comments on Saaty's AHP*, Management Science, Vol. 41, No. 6, pp. 1091–1095, 1995.

[10] T. L. Saaty, *Multicriteria Decision Making*, The Analytic Hierarchy Process, Planning, Priority Setting, Resource Allocation, RWS Publications, Pittsburgh, USA, 1988.

[11] T. L. Saaty, *Decision-making with the AHP: Why is the principal eigenvector necessary*?, European Journal of Operational Research, 145, pp. 85-91, 2003.